Hochwasserwelle:

$\mathbf{h}(t):=\frac{5}{98}\cdot t^4-\frac{65}{49}\cdot t^3+\frac{845}{98}\cdot t^2+30$ ▸ *Fertig*

a) Abbildung siehe Graph−Fenster. Die Funtktion wurde im Intervall I=[0,13] mit der Funktion ***piecewise(h(x), x>0 and x<13)*** dargestellt.

b) $\mathbf{h}(0)$ ▸ 30

Antwort: Die Hochwasserwelle hat eine Höhe von 30cm.

c) $\frac{d}{dt}(\mathbf{h}(t))$ ▸ $\frac{10\cdot t^3}{49}-\frac{195\cdot t^2}{49}+\frac{845\cdot t}{49}$ $\frac{d}{dt}(\mathbf{h}(t))|t=1$ ▸ 13.4694

Antwort: Am Ende des ersten Tages hat die Welle einen Anstieg von ca. 37,3cm pro Tag.

Dies enstpricht einem Anstieg von $\frac{13.46}{24}$ ▸ 0.560833 cm pro Stunde.

d) Gesucht sind die Wendestellen, d.h. Stellen des stärksten Anstiegs.

HBfW: f''(x)=0 und f'''(x)<>0

$\frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{h}(t))=0$ ▸ $\frac{30\cdot t^2}{49}-\frac{390\cdot t}{49}+\frac{845}{49}=0$

$\text{solve}\left(\frac{30\cdot t^2}{49}-\frac{390\cdot t}{49}+\frac{845}{49}=0,t\right)$ ▸ $t=2.74722$ or $t=10.2528$

Überprüfung mit Hilfe der 3. Ableitung :

$\frac{d^3}{dt^3}(\mathbf{h}(t))|t=2.74722$ ▸ -4.59524

$\frac{d^3}{dt^3}(\mathbf{h}(t))|t=10.2528$ ▸ 4.59527

Die Bedingung für Wendestellen sind somit erfüllt und die Funktionswerte der Wendestellen liegen bei

$\mathbf{h}(2.74722)$ ▸ 70.4775 und $\mathbf{h}(10.2528)$ ▸ 70.4771. (Achtung: Symmetrie!) und somit sind die Wendepunkte

W1(2.74 | 70.48) und W1(10.25 | 70.48).

e) Betrachte die Gleichung $\mathbf{h}(t)=120 \blacktriangleright \frac{5\cdot t^4}{98}-\frac{65\cdot t^3}{49}+\frac{845\cdot t^2}{98}+30=120$

$$\text{solve}\left(\frac{5\cdot t^4}{98}-\frac{65\cdot t^3}{49}+\frac{845\cdot t^2}{98}+30=120,t\right) \blacktriangleright t=-2.67878 \text{ or } t=6. \text{ or } t=7. \text{ or } t=15.6788$$

Im Intervall I=[0;13] liegen die Werte nur im Intervall [6,7] über dem Wert von 120 cm, d.h. am 6. Tag war die Stadt überflutet.

f) Der höchste Wasserstand ist das Maximum im Intervall I.

HBfE: f'(x)=0 und f''(x) < 0

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{h}(t))=0 \blacktriangleright \frac{10\cdot t^3}{49}-\frac{195\cdot t^2}{49}+\frac{845\cdot t}{49}=0$$

$$\text{solve}\left(\frac{10\cdot t^3}{49}-\frac{195\cdot t^2}{49}+\frac{845\cdot t}{49}=0,t\right) \blacktriangleright t=0. \text{ or } t=6.5 \text{ or } t=13.$$

Lokales Maximum mit Hilfe der 2. Ableitung überprüfen,

$$\frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{h}(t))|t=6.5 \blacktriangleright -8.62245.$$

Die Bedingung auf ein lokales Maximum trifft zu.

Für die beiden anderen Stellen

$$\frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{h}(t))|t=0 \blacktriangleright \frac{845}{49} \quad \frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{h}(t))|t=13 \blacktriangleright \frac{845}{49}$$

erhalten wir lokale Minima.

Der Wasserstand erreicht am Mittag des 6. Tages sein Maximum mit einer Höhe von $\mathbf{h}(6.5) \blacktriangleright 121.075$ cm.

g) ist eine andere Formulierung des

Aufgabenteils f)

h) Es handelt sich um die zweite Wendestelle, d.h $\mathbf{h}(10.2528) \blacktriangleright 70.4771$

Für den Abstieg pro Tag ergibt sich

$\frac{d}{dt}(\mathbf{h}(t))|t=10.2528 \blacktriangleright -21.5721$ cm pro Tag und ein Wert von $\frac{-21.57}{24} \blacktriangleright -0.89875$ cm pro Stunde.

Das negative Vorzeichen deutet den Abstieg an.

i) Zu berechnen ist die Gleichung

$$\mathbf{h}(t)=30 \blacktriangleright \frac{5\cdot t^4}{98}-\frac{65\cdot t^3}{49}+\frac{845\cdot t^2}{98}+30=30$$

$$\text{solve}\left(\frac{5\cdot t^4}{98}-\frac{65\cdot t^3}{49}+\frac{845\cdot t^2}{98}+30=30,t\right) \blacktriangleright t=0 \text{ or } t=13$$

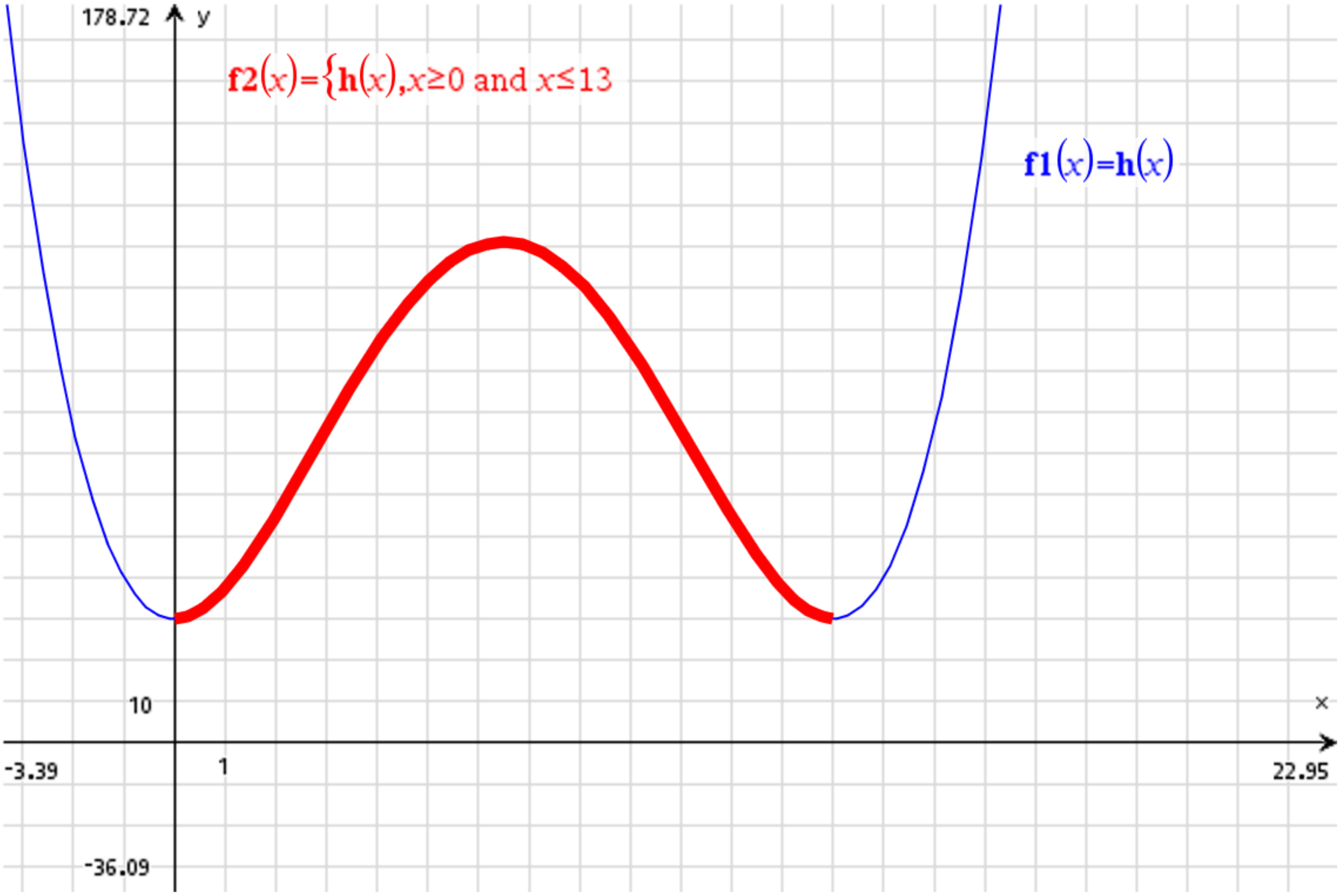
Die Hochwasserwelle ist am 13. Tag vorüber.

j) am vierten Tag eine Höhe von 90cm

$$\frac{90}{\mathbf{h}(4)} \blacktriangleright 0.936306$$

Multipliziert man den maximalen Wert mit diesem Prognosefaktor erhält man

$0.936306\cdot \mathbf{h}(6.5) \blacktriangleright 113.363$ cm. Es wird keine Überflutung geben.



178.72
y
f2(x)={h(x),x≥0 and x≤13
f1(x)=h(x)
10
x
-3.39
1
22.95
-36.09